CAPíTULO 11

Método da Separação de Variáveis

O Método de Separação de Variáveis é um método que permite encontrar soluções de vários Problemas de Valor Inicial ou de Contorno com EDPs. Dado um tal problema, a idéia básica do método é:

- Separe a parte homogênea (H) do seu problema, onde vale o *Princípio da Superposição* (isto é, se u_1 e u_2 são soluções de (H), então $c_1u_1 + c_2u_2$ é solução de (H) para quaisquer c_1 e c_2 reais);
- Procure *autosoluções*, isto é, soluções (não-nulas) do sistema (H); no caso do método de Separação de Variáveis para duas variáveis, procuramos soluções do tipo $u(x,t) = X(x).T(t)$. Se você der "sorte", encontrará uma família de soluções – tipicamente, u_1, u_2, u_3, ... , u_n, ...
- Pelo princípio da Superposição, qualquer função do tipo $\sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t)$ também será solução de (H); abuse da sua sorte[1] e procure uma solução do tipo $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$, calibrando os coeficientes c_i de maneira a satisfazer as condições do Problema inicial que não estavam em (H). Espera-se assim encontrar uma solução do problema original.

11.1. A Equação do Calor

EXEMPLO 83. *Vamos usar o Método da Separação de Variáveis para mostrar que a solução do Problema do Calor*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \text{ para } x \in (0,\pi) \end{aligned}$$

é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

são os coeficientes da série de Fourier em senos de $f(x)$.

Em primeiro lugar, vamos nos concentrar na parte homogênea do sistema (tipicamente, uma EDP linear e condições de contorno nulas). Assim, inicialmente vamos trabalhar com:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \quad \text{((H))} \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \end{aligned} \tag{6}$$

Por separação de variáveis, vamos procurar funções do tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$ que satisfaçam a EDP acima. Teríamos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Como o lado esquerdo não depende de t e o direito não depende de x, somos forçados a concluir que ambos os lados são constantes, digamos, λ. Assim, temos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) \\ T'(t) &= \lambda T(t) \end{aligned}$$

Por outro lado, as condições de contorno nos dão

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

Como não estamos interessados em $T(t)$ identicamente nula (pois aí seria $u(x,t) = X(x)T(t) = 0$, uma solução nula que não nos interessa), somos forçados a concluir que

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

[1] É claro que, em determinadas situações, há teoremas que garantem que esta passagem ao infinito funciona. Citaremos algumas destas explicitamente, e aí não precisaremos da "sorte".

Neste momento, vamos separar nossa análise em 3 casos, dependendo do sinal de λ:

Caso 1: *λ positivo. Então a solução da EDO em X é*

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

o que, juntando com as condições $X(0) = X(\pi) = 0$ nos daria

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Este é um sistema linear possível determinado em A e B, então a única solução é $A = B = 0$. Mas então $X(x) \equiv 0$, o que de novo não nos interessa (não queremos $u(x,t) \equiv 0$).

Caso 2: *$\lambda = 0$. Neste caso, a solução da EDO em X é*

$$X(x) = A + Bx$$

o que, juntando com as condições de contorno, nos dá

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A + B\pi &= 0 \end{aligned}$$

e, novamente, $A = B = 0$, que não presta de novo.

Caso 3: *λ negativo. Então, colocando $w = \sqrt{-\lambda}$ para facilitar a notação:*

$$X(x) = A\cos(wx) + B\sin(wx)$$

e, juntando com $X(0) = X(\pi) = 0$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A\cos(w\pi) + B\sin(w\pi) &= 0 \end{aligned}$$

O único jeito de evitar mais uma solução identicamente nula é tomar $B \neq 0$ e $\sin(w\pi) = 0$, isto é, $w = n \in \mathbb{Z}$. Mas, neste caso, B pode ser qualquer número real!

Assim, só temos soluções não-nulas se $\lambda = -w^2 = -n^2$ onde $n \in \mathbb{Z}$ – tais possíveis valores de λ são chamados autovalores *do sistema. Teríamos então*

$$X_n(x) = B\sin(nx)$$

e, como $T'(t) = \lambda T(t)$, então

$$T_n(t) = Ke^{\lambda t} = Ke^{-n^2 t}$$

Juntando tudo, encontramos uma família de soluções do sistema (H) da forma[2]

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = cte.\left(e^{-n^2 t}\sin(nx)\right) \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, ...$$

(estas são as autofunções *deste sistema). Pelo princípio da superposição, temos a esperança*[3] *de que isto implique na existência de soluções do tipo*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

Enfim, quem seriam os coeficientes c_n? Tomando $t = 0$, temos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = f(x)$$

portanto, os coeficientes são os que aparecem na série de $f(x)$ em senos! Sabemos o que isso significa:

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

O teorema abaixo (que não demonstraremos) generaliza algumas das constantes utilizadas e confirma a solução obtida acima (justificando os "somatórios infinitos"):

---

[2] Tomar $n = 0$ mais uma vez gera uma solução identicamente nula; e trocar o sinal de n simplesmente troca u_n por $-u_n$, que é essencialmente a mesma solução apenas trocando o sinal da constante multiplicativa. Assim, nada é perdido ao tomar n natural positivo.

[3] Mais uma vez, destacamos que isto poderia não funcionar – o princípio da superposição garante que combinações lineares **finitas** de soluções ainda são soluções; neste caso estamos usando um somatório infinito. Por outro lado, se este somatório infinito puder ser diferenciado termo a termo, o método funciona.

TEOREMA 84. *Seja $f(x)$ uma função integrável com domínio $(0,L)$ e α uma constante positiva*[4]*. Então a série*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \text{onde } c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

converge uniformemente para uma função infinitamente diferenciável *sempre que $t>0$, e pode ser diferenciada termo-a-termo. Assim, esta série satisfaz o seguinte Problema do Calor com condições de contorno*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \text{ para } t>0 \end{aligned}$$

Enfim, se f for seccionalmente suave,

$$u(x,0) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \text{ para } x \in (0,L)$$

Em particular, se f for contínua, tem-se

$$u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0,L)$$

Note uma curiosa propriedade desta solução: mesmo que $f(x)$ tenha saltos ou bicos, a solução $u(x,t)$ será contínua e suave para qualquer $t>0$. Ou seja, a solução $u(x,t)$ **suaviza instantaneamente** a condição inicial $f(x)$ (para qualquer t positivo, por menor que seja), até nos extremos da barra.

EXEMPLO 85. *Encontremos um exemplo explícito de solução do Problema*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, \text{ se } \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases} \text{ para } x \in (0,\pi) \end{aligned}$$

Calculando a série de Fourier em senos de $f(x)$, após algum trabalho, encontramos

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m}\left(1-\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)\sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{5} + \frac{\sin 11x}{11} + \frac{\sin 13x}{13} + ...\right) \end{aligned}$$

Então a solução do sistema

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t \text{ para } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \text{ para } x \in (0,\pi) \end{aligned}$$

é

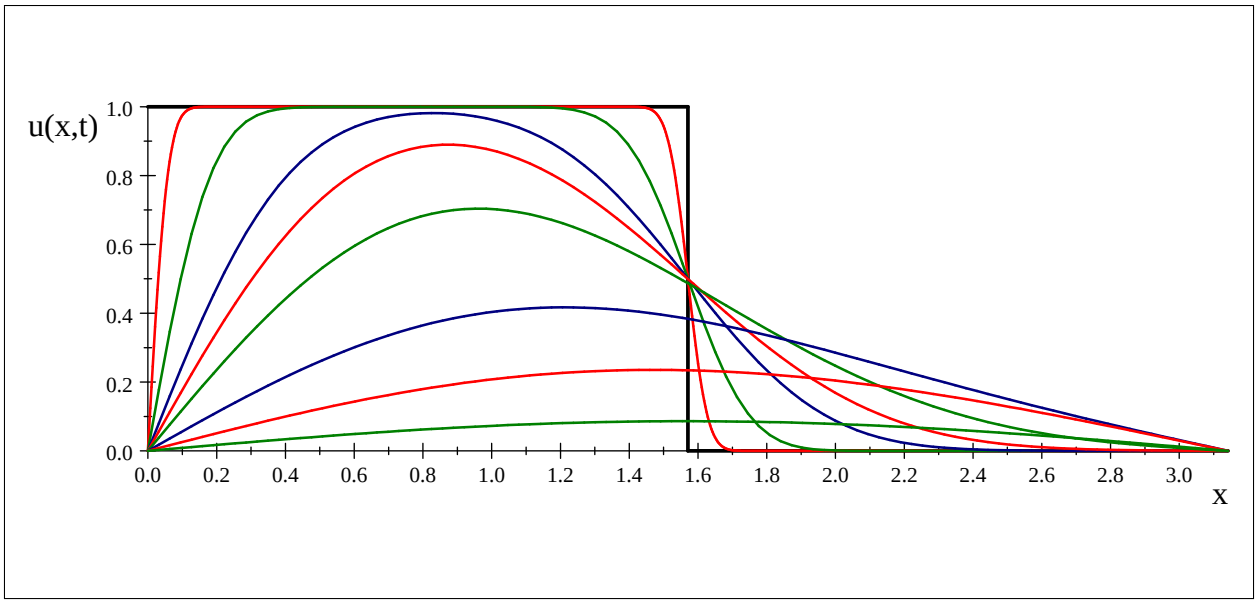
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m}\left(1-\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)e^{-m^2 t}\sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(e^{-t}\sin x + e^{-4t}\sin 2x + e^{-9t}\frac{\sin 3x}{3} + e^{-25t}\frac{\sin 5x}{5} + e^{-36t}\frac{\sin 6x}{3} + e^{-49t}\frac{\sin 7x}{7} + e^{-81t}\frac{\sin 9x}{9} + ...\right) \end{aligned}$$

No gráfico abaixo[5]*, plotamos esta solução para vários valores de t (para ser exato, $t = 0; 0.001; 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.5; 1$ e 2) . Note a suavização "instantânea"dos saltos da condição inicial, e a queda "instantânea"da temperatura do bordo esquerdo para 0.*

---

[4] No caso da Equação do Calor como modelo físico para a temperatura de uma barra homogênea, a constante α que aparece em $u_t = \alpha u_{xx}$ é chamada *condutividade térmica* do material do qual a barra é feita.

[5] Veja "filmes"no site!



Não é nenhuma surpresa que $u(x,t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$. *Aliás, mais ainda, note que para* t *grande,* $u(x,t) \simeq \frac{2}{\pi} e^{-t} \sin x$ *(os outros termos tem os coeficientes exponenciais muito muito muito pequenos!). Em outras palavras, para* t *grande, o gráfico de* $u(x,t)$ *(em função de* x*) se assemelha a uma senóide cuja frequência é a frequência fundamental do sinal original*[6].

11.2. A Equação de Laplace

Considere agora uma placa bidimensional de material homogêneo. Seja $u(x,y,t)$ a temperatura do ponto (x,y) desta placa no tempo t. Se a placa está isolada termicamente do meio ambiente (exceto possivelmente por suas bordas), é possível mostrar que a temperatura evolui segundo a *equação do calor em duas dimensões*, a saber:

$$u_t = c\Delta u = c\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

onde c é uma constante que depende das propriedades do material. Tipicamente, esta equação vem acompanhada de condições iniciais (do tipo $u(x,y,0) = f(x,y)$) e de contorno (por exemplo, $u(x,y,t) = 0$ nos pontos (x,y) na borda de algum retângulo).

Ao invés de tentar resolver tal equação em duas dimensões, abordaremos aqui agora apenas a seguinte questão: qual seria a distribuição de temperatura de estado estacionário desta placa? Em outras palavras, queremos uma solução que não dependa do tempo, ou seja, queremos resolver

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Esta equação é chamada de *Equação de Laplace* e aparece em vários outros contextos da Engenharia e da Física (suas soluções são chamadas *funções harmônicas*). Se a região onde vale esta equação for retangular (e o valor de u no bordo da região for determinado por condições de contorno dadas), o método da separação de variáveis é adequado:

Exemplo 86. *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ para } (x,y) \in (0,L) \times (0,M) \\ u(0,y) = u(L,y) = u(x,0) = 0 \text{ para } x \in (0,L) \text{ e } y \in (0,M) \\ u(x,M) = f(x) \text{ para } x \in (0,L) \end{cases}$$

cuja solução seria a temperatura de estado estacionário de uma placa com três lados mergulhados em gelo e o quarto lado $y = M$ *com distribuição de temperatura deteminada por* $f(x)$.

Usando separação de variáveis, procuremos soluções do tipo $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ *para as duas primeiras linhas do problema acima. Teremos*

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

As condições $u(0,y) = u(L,y) = 0$ *implicam em* $X(0) = X(L) = 0$ *(pois não queremos soluções identicamente nulas). Estas condições são incompatíveis com os casos* $\lambda > 0$ *(que dá* $X(x)$ *exponencial) e* $\lambda = 0$ *(que dá* $X(x)$

[6] Aliás, como o máximo do primeiro harmônico $\sin x$ está em $x = \frac{\pi}{2}$, isto praticamente mostra que o ponto mais quente da barra se aproximará do centro da barra à medida que $t \to \infty$.

função afim), então ficamos apenas com a hipótese $\lambda < 0$ (mais especificamente, com $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$). Enfim, usando as condições $X(0) = X(L) = Y(0) = 0$, chegamos às seguintes soluções separadas:

$$u_n(x,y) = c_n \frac{e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para terminar, montamos uma solução por superposição[7]

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e calibramos os coeficientes c_n usando a última condição $u(x,M) = f(x)$. Assim, queremos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Em suma, a solução é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

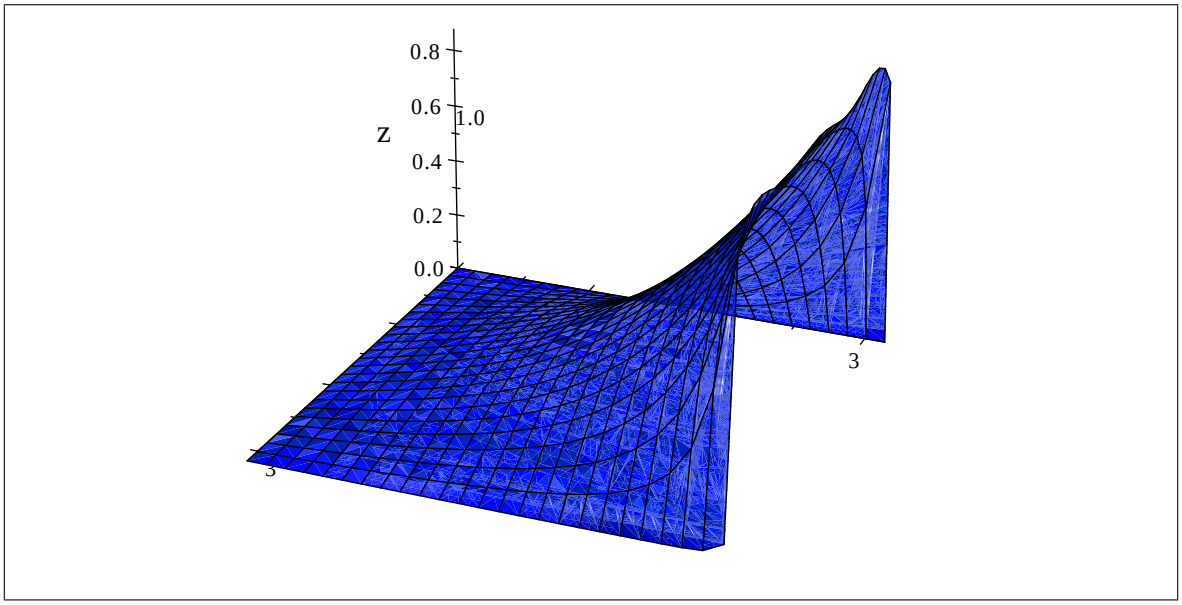
Por exemplo, se $L = M = \pi$ e $f(x) = 1$ para $x \in (0,\pi)$, sabemos que

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1:2}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{m}$$

Então

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1:2}^{\infty} \frac{\sinh(my)}{\sinh(m\pi)} \frac{\sin(mx)}{m}$$

cujo gráfico é aproximadamente



11.3. Exercícios

1) Encontre **todas** as soluções não-nulas da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ para as seguintes EDPs:
a) $u_x - 4u_y = 0$
b) $u_x + u_y = 3u$
c) $u_{xx} + 9u_{yy} = 0$
d) $x^2 u_{xx} - u_{yy} = 0$

[7] Lembre que $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Esta função é bastante útil para simplificar as expressões encontradas.

Respostas: a) $u(x,y) = e^{\lambda(4x+y)}$; *b)* $u(x,y) = e^{\lambda(x-y)+3y}$; *c)* $u(x,y) = \left(c_1 e^{3wx} + c_2 e^{-3wx}\right)(c_3 \cos wy + c_4 \sin wy)$; $u(x,y) = (c_1 \cos 3wx + c_2 \sin 3wy)\left(c_3 e^{wy} + c_4 e^{-wy}\right)$; $u(x,y) = (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4)$;

$$\begin{aligned}
d)\ u(x,y) &= \left(c_1 x^{\frac{1+\sqrt{1+4w^2}}{2}} + c_2 x^{\frac{1-\sqrt{1+4w^2}}{2}}\right)\left(c_3 e^{wy} + c_4 e^{-wy}\right);\ u(x,y) = (c_1 x + c_2)(c_3 y + c_4); \\
u(x,y) &= \left(c_1 x^{\frac{1+\sqrt{1-4w^2}}{2}} + c_2 x^{\frac{1-\sqrt{1-4w^2}}{2}}\right)(c_3 \cos wy + c_4 \sin wy) \text{ com } 0 < w \leq \frac{1}{2} \\
u(x,y) &= x^{1/2}(c_1 + c_2 \ln x)\left(c_3 \cos \frac{y}{2} + c_4 \sin \frac{y}{2}\right); \\
u(x,y) &= x^{1/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4w^2-1}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4w^2-1}}{2} \ln x\right)\right)(c_3 \cos wy + c_4 \sin wy) \text{ com } w > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2) São dadas uma constante $\alpha > 0$ e uma função $f(x)$ com domínio $(0, L)$. Utilize o Método da Separação de Variáveis para resolver o PVC do Calor com condições de contorno adiabáticas (isto é, as extremidades da barra estão isoladas):

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0,L) \end{cases}$$

Em particular, conclua que, quando $t \to \infty$,a temperatura da barra se aproxima de uma constante, que é a temperatura média da barra quando $t = 0$.

Resposta: $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ *onde* $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

3) Considere o problema do Calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Encontre a solução explicitamente por separação de variáveis, nos seguintes casos:

a) $f(x) = \sin x$.

b) $f(x) = \sin^3 x$.

c) $f(x) = x(\pi - x)$.

Respostas: a) $u(x,t) = e^{-t}\sin x$; *b)* $u(x,t) = \left(3e^{-t}\sin x - e^{-9t}\sin 3x\right)/4$; *c)* $u(x,t) = \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3} e^{-n^2 t}\sin nx$

4) [adaptado de Boyce-de Prima] Uma barra homogênea de $L = 50cm$ de comprimento está inicialmente a uma temperatura constante de 100^0C. A seguir, sua superfície lateral é isolada e suas extremidades são mergulhadas em gelo (a 0^0C). Encontre a temperatura em seu ponto médio após 30 minutos, supondo que (i) o material da barra é concreto; (ii) o material da barra é ferro.

Dados: condutividade térmica destes materiais: $\alpha_{\text{concreto}} = 0.005cm^2/s$; $\alpha_{\text{ferro}} = 0.15cm^2/s$.

Resposta: (i) Aproximadamente 100.00^0C*; (ii) Aproximadamente* 43.85^0C.

5) Repita o exercício (3) resolvendo agora o seguinte problema da Onda:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0 \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Encontre explicitamente a solução por separação de variáveis usando cada uma das condições iniciais $f(x)$ daquele exercício.

Respostas: a) $u(x,t) = \cos t \sin x$; *b)* $u(x,t) = (3\cos t \sin x - \cos 3t \sin 3x)/4$. *c)* $u(x,t) = \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3}\cos nt \sin nx$

6) Repita o exercício (2) trocando as condições de contorno por

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty)$$

Resposta:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1:2}^{\infty} b_n \exp\left(-\alpha\frac{n^2\pi^2}{4L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right) \\
\text{onde } b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)dx
\end{aligned}$$

7) a) Utilize o Método da Separação de Variáveis para resolver o seguinte PVC da Equação da Onda (que representa o movimento de uma corda com extremidades fixas, *largada* a partir de um estado inicial $f(x)$):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = 0 \text{ para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Em particular, mostre que quando $t = \frac{2\pi}{c}$, a corda volta ao estado inicial.

b) Determine explicitamente esta solução no caso em que $c = 1$ e $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \text{ se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$.

Respostas: a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(cnt) \sin(nx)$ *onde* $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$. *Como* $\cos(cnt)$ *tem período* $\frac{2\pi}{c}$, *temos* $u\left(x, t + \frac{2\pi}{c}\right) = u(x,t)$, *isto é, a corda repete seu movimento a cada* $\frac{2\pi}{c}$ *unidades de tempo.*

b) A série em senos $f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m}\left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \sin mx$ *está no texto do capítulo. Então:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m}\left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \cos(mt) \sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x + \cos 3t \frac{\sin 3x}{3} + \cos 5t \frac{\sin 5x}{5} + \cos 6t \frac{\sin 6x}{3} + \cos 7t \frac{\sin 7x}{7} + ...\right) \end{aligned}$$

cujo gráfico pode ser feito usando as técnicas do capítulo 14:

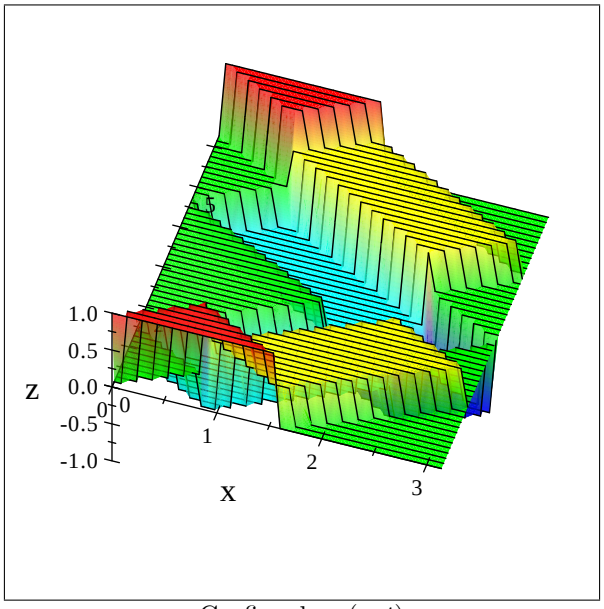


Grafico de $u(x,t)$

8) Dada uma função $g(x)$ com domínio $(0,\pi)$, use o método da separação de variáveis para resolver formalmente o seguinte problema da Onda (agora a corda tem extremidades fixas e sua posição inicial é reta, mas há uma velocidade inicial $g(x)$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x,0) &= 0 \text{ para } 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) &= g(x) \text{ para } 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Resposta: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt \sin nx$ onde $c_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx$.

9) Resolva por separação de variáveis a seguinte "variante"da Equação do Calor:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - u &= 0 \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} a, \text{ se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -a, \text{ se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Resposta:

$$u(x,t)=\sum_{n=2:4}^{\infty}\frac{8a}{\pi n}e^{\left(1-n^2\right)t}\sin(nx)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8a}{\pi(4k+2)}e^{\left(1-(4k+2)^2\right)t}\sin((4k+2)x)$$

10) Resolva por separação de variáveis o seguinte problema de Laplace

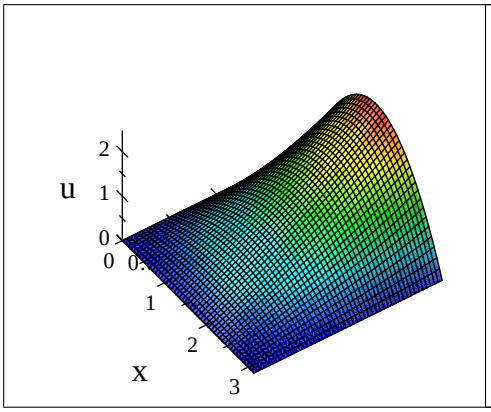
$$u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ para } 0<x<\pi \text{ e } 0<y<1$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=u(x,1)=0 \text{ para } 0<x<\pi \text{ e } 0<y<1$$
$$u(x,0)=4 \text{ para } 0<x<\pi$$

Resposta: $u(x,y)=\frac{16}{\pi}\sum_{n\text{ ímpar}}\frac{\sinh(n(1-y))}{\sinh n}\frac{\sin nx}{n}$

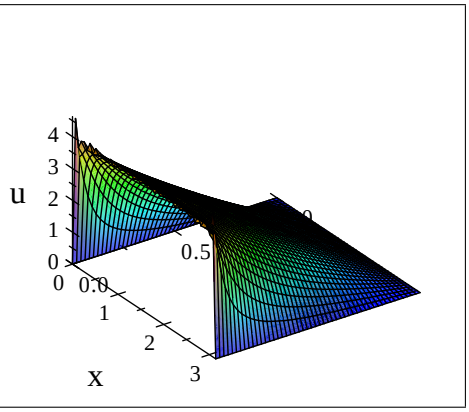
11) Resolva por separação de variáveis o seguinte problema de Laplace

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy} &= 0 \text{ para } 0<x<\pi \text{ e } 0<y<L \\ u(x,0) &= u(0,y)=u(\pi,y)=0 \text{ para } 0<y<L \\ u(x,L) &= x(\pi-x) \text{ para } 0<x<\pi \end{aligned}$$

Resposta: $u(x,y)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1:2}^{\infty}\frac{1}{n^3}\frac{e^{ny}-e^{-ny}}{e^{nL}-e^{-nL}}\sin nx=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1:2}^{\infty}\frac{1}{n^3}\frac{\sinh ny}{\sinh nL}\sin nx.$



Problema 10



Problema 11